Lokalizācija kvantu klejošanā un elektriskie tīkli

Doktorants: Jevgēnijs Vihrovs

Darba vadītājs: LU prof., Dr. dat. Andris Ambainis

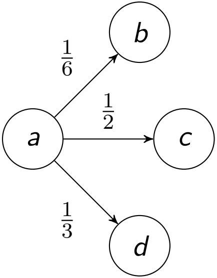
Latvijas Universitāte
Datorikas fakultāte

2015. gada 11. novembrī

Saturs

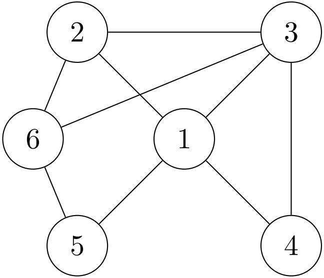
Varbūtiskā klejošana

- Klejošanas stāvoklis – atrašanās vieta, viena virsotne.
- Varbūtība aiziet no u uz v vienā solī: p_{uv}.
- $\sum_{u \sim v} p_{uv} = 1.$



Varbūtiskā klejošana

- Klejošana notiek grafā ar *n* virsotnēm.



Varbūtiskā klejošana

- Varbūtība atrasties virsotnē i pēc t soļiem: $x_t(i)$.
- Varbūtiskās klejošanas viens solis:

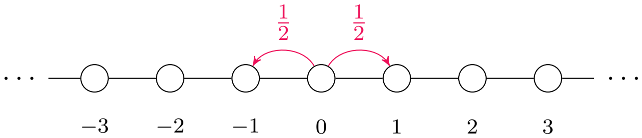
$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{21} & p_{31} & \cdots & p_{n1} \\ p_{12} & p_{22} & p_{32} & \cdots & p_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{1n} & p_{2n} & p_{3n} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}$$

- Viena soļa izpilde:

$$x_t = Px_{t-1} = P^t x_0.$$

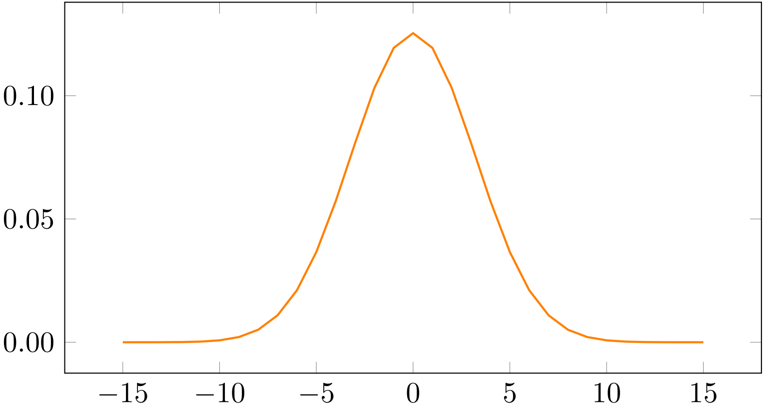
Varbūtiskā klejošana

- Piemērs – klejošana uz taisnes.
- $p_{i,i-1} = p_{i,i+1} = \frac{1}{2}$.



Varbūtiskā klejošana

- Atrašanās varbūtība pēc 40 soļiem.



Saturs

Kvantu klejošana

- Klejošanas stāvoklis – fizikālā daļiņa, kas ceļo pa grafu.
- Klejošanas laikā daļiņa atrodas *superpozīcijā* pāri grafa šķautņēm.

Kvantu klejošana

- Katrai šķautnei $u \to v$ izveido stāvokli $|uv\rangle$.
- Vienu kvantu stāvokli var aprakstīt ar

$$|\psi\rangle = \sum_{u \to v} \alpha_{uv} |uv\rangle .$$

- α_{uv} ir kompleksi skaitļi, citādi pieraksta kā $\alpha_{uv} = \langle uv \mid \psi\rangle$. Ja

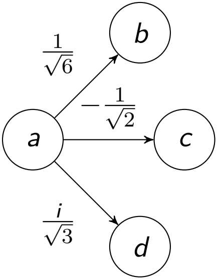
$$\sum_{u \to v} |\alpha_{uv}|^2 = 1,$$

tad daļiņa atrodas šķautnē $u \to v$ ar varbūtību $|\alpha_{uv}|^2$.

Kvantu klejošana

- $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}|ab\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|ac\rangle + \frac{i}{\sqrt{3}}|ad\rangle.$
- Daļiņa atrodas:

  $a \rightarrow b$ ar varb. $1/6$;
  $a \rightarrow c$ ar varb. $1/2$;
  $a \rightarrow d$ ar varb. $1/3$.



Kvantu klejošana

- Šķautņu stāvokļi veido lineāru telpu.
- Viens klejošanas solis – unitāra transformācija U.

$$|\psi_t\rangle = U|\psi_{t-1}\rangle = U^t|\psi_0\rangle .$$

- Algoritms:
  1. sagatavo kvantu stāvokli $|\psi_0\rangle$;
  2. izpilda t soļus, iegūst $|\psi_t\rangle$;
  3. nomēra kvantu stāvokli; ar varbūtību $|\langle uv \mid \psi_t\rangle|^2$ daļiņa atradīsies šķautnē $u \to v$.

Kvantu klejošana

- Piemērs: klejošana uz taisnes.

- $U = SC$, kur C – monētas mešana, S – pārvietošanās.
  - $C|x,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|x,0\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|x,1\rangle$
    $C|x,1\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}}|x,0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|x,1\rangle$
  - $S|x,0\rangle = |x-1,0\rangle$
    $S|x,1\rangle = |x+1,1\rangle$

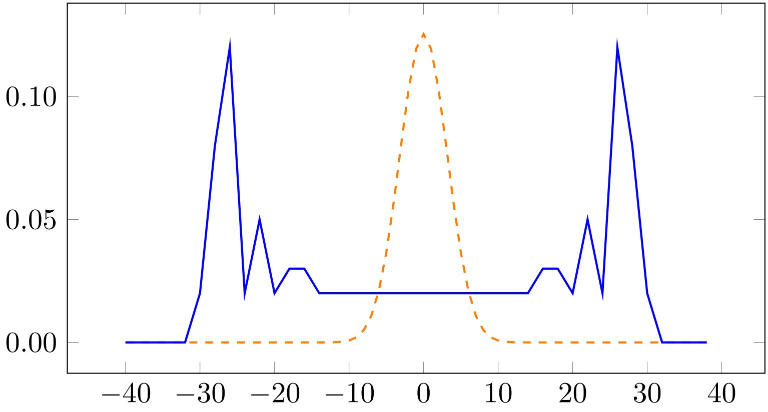
- Apzīmē $|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|x,0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|x,1\rangle$.

- Varbūtība pēc t soļiem nonākt virsotnē x, ja sāk 0:

$$\left|\langle x \mid U^t \mid 0\rangle\right|^2.$$

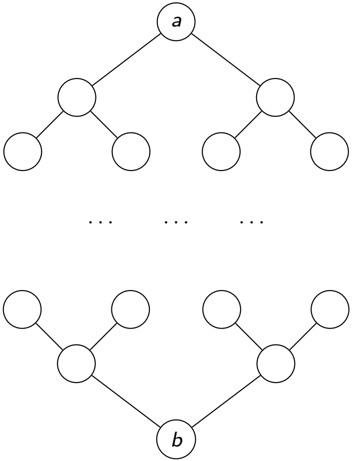
Kvantu klejošana

- Atrašanās varbūtība pēc 40 soļiem.



Kvantu klejošana

- Salīmē divus binārus kokus augstumā d.
- Soļu skaits, lai nonāktu no a uz b ar konstantu varbūtību:
  - Varbūtiski: $\mathcal{O}(2^d)$.
  - Kvantiski: $\mathcal{O}(d^2)$.
- Kvantu klejošana šajā gadījumā ir eksponenciāli ātrāka. [Childs et. al., 2002]



Saturs

Lokalizācija

- *Lokalizācija* – daļiņa iesprūst sākumstāvoklī $|\psi_0\rangle$ un klejošana faktiski nenotiek.
- Formāli: jebkuram soļu skaitam t:

$$\left|\langle\psi_0 \mid U^t \mid \psi_0\rangle\right|^2 \approx 1.$$

Lokalizācija

- Aplūko klejošanu regulāros grafos.
- Transformācija $U = SC$, kur
  - C ir Grovera transformācija. [Grover, 1996]
  - $S|uv\rangle = -|vu\rangle$.
- **Problēma:**
  Dots: grafs G, sākumstāvoklis $|\psi_0\rangle$.
  Jautājums: vai notiek lokalizācija?

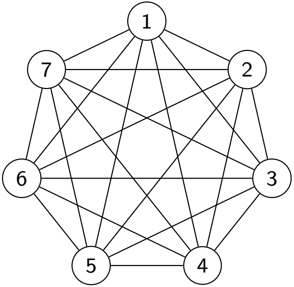
Lokalizācija

- Piemērs: pilnais grafs K_n.
- Ja sāk stāvoklī

$$|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{n-1}} \sum_{a \to b} |ab\rangle ,$$

klejošana strādā.

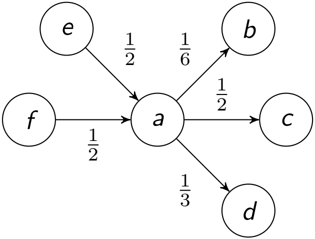
- Ja sāk stāvoklī $|\psi_0\rangle = |ab\rangle$, notiek lokalizācija.



Saturs

Elektriskie tīkli

- Strāva grafā G.
- I_{uv} – strāva no u uz v.
- R_{uv} – pretestība starp u un v.



Elektriskie tīkli

- Antisimetrija:

$$I_{uv} = -I_{vu}.$$

- Kirhofa strāvas likums:

$$\sum_{u \to v} I_{uv} = 0.$$

- Kirhofa sprieguma likums:

$$\sum_{u \to v} V_{uv} = \sum_{u \to v} I_{uv} R_{uv} = 0.$$

Elektriskie tīkli

- Strāvas plūsma minimizē enerģijas zudumus:

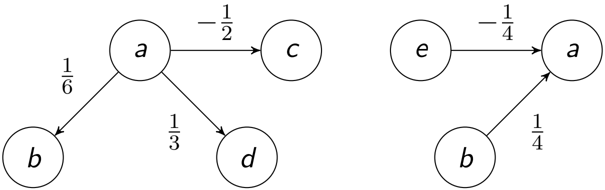
$$\sum_{u \to v} I_{uv}^2 R \rightarrow \min .$$

- Šo vērtību sauc par efektīvo pretestību R_{eff}.

Elektriskie tīkli

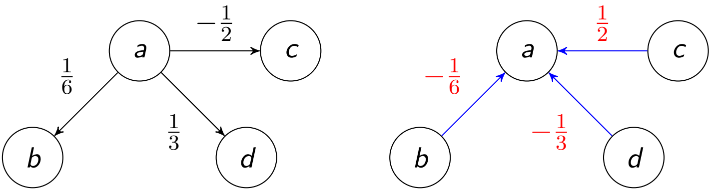
- Stāvokli $|s\rangle$ sauksim par *Grover-invariantu*, ja

$$\sum_{u \to v} \langle uv \mid s \rangle = 0, \qquad \sum_{u \leftarrow v} \langle vu \mid s \rangle = 0.$$



Elektriskie tīkli

- Ko izdara klejošana?



- Tātad

$$U^{2t}|s\rangle = |s\rangle .$$

Elektriskie tīkli

- Meklēsim tādu Grover-invariantu stāvokli $|s\rangle$, kas ir tuvs sākumstāvoklim:
$$|\psi_0\rangle \approx |s\rangle \,.$$
- Tad
$$|\psi_0\rangle \approx |s\rangle = U^{2t}\,|s\rangle \approx U^{2t}\,|\psi_0\rangle \,,$$
un notiek lokalizācija.

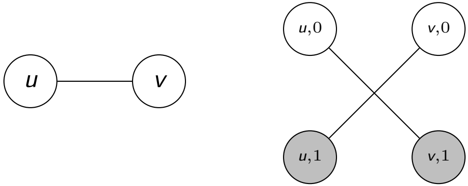
Elektriskie tīkli

- Pieņemsim, ka
$$|\psi_0\rangle = \alpha\,|s\rangle + \beta\,|r\rangle\,,$$
kur $|s\rangle$ ir Grover-invariants.

- Meklējam tādu $|s\rangle$, lai maksimizētu $|\alpha|^2$ / minimizētu $|\beta|^2$.

Elektriskie tīkli

- Izveidojam grafu G_b:
  1. Katrai virsotnei $v \in G$ izveidojam divas virsotnes
  $$(v,0),(v,1) \in G_b.$$
  2. Ja $(u,v) \in G$, tad izveidojam divas šķautnes
  $$((u,0),(v,1)),((u,1),(v,0)) \in G_b.$$



Elektriskie tīkli

- Visām šķautnēm $u \to v$ ar $\langle uv \mid \psi_0 \rangle \neq 0$:
  1. Izņemam no G_b šķautni $((u,0),(v,1))$.
  2. Pieprasam, lai no $(u,0)$ uz $(v,1)$ plūstu strāva ar vērtību $\langle uv \mid \psi_0 \rangle$.
- Visām pārējām šķautnēm uzstādam $R_{((u,0),(v,1))} = 1$.
- No iegūtās strāvas (ja tāda ir) var izveidot Grover-invariantu stāvokli $|s\rangle$ tādu, ka

$$|\psi_0\rangle = \sqrt{\frac{1}{1+R_{eff}}}\,|s\rangle + \sqrt{\frac{R_{eff}}{1+R_{eff}}}\,|r\rangle\,.$$

Elektriskie tīkli

- Teorēma:

$$\left|\langle \psi_0 \mid U^{2t} \mid \psi_0 \rangle\right|^2 \geq \frac{1 - R_{\mathit{eff}}}{1 + R_{\mathit{eff}}}.$$

- Rezultāts:

maza efektīva pretestība $\Rightarrow$ kvantu klejošanas lokalizācija.

Paldies!

Jautājumi?