Ceļojošā tirgoņa problēma (TSP)

Kvantu algoritms ierobežotam kvantu bitu skaitam

Mārtiņš Kālis

doktorantūras seminārs, 27.11.2019.

Problēma.

Dotas n pilsētas un attālumi starp tām. Pirmā pilsēta ir fiksēta. Cik garš ir īsākais cikls (NP-sarežģīta problēma) / Vai eksistē cikls, kas īsāks par m (NP-pilna problēma), kurā katra pilsēta tiek apmeklēta tieši vienu reizi un tirgonis atgriežas pirmajā pilsētā?

Variācijas:

- Eiklīda attālums,
- Manhetenas attālums,
- (A)simetriska attālumu / cenu / laika matrica,
- Grafs (saraksts, k-regularitāte),
- Starp pilsētām neeksistējoši ceļi,
- ...

Variācijas #2

- Precīzs risinājums.
    - Varbūtisks risinājums.
- Aptuvens risinājums (piemēram, atrastā ceļa garums ir ne vairāk kā divkāršs optimālā ceļa garums).
- Metaheiristikas / AI (ierobežotā laikā cenšas atrast pieņemamu risinājumu bez garantijām).

Pilnā pārlase

- Laika sarežģītība: $O(n!) \approx O(n^n)$.
- Telpas sarežģītība: $O(n)$.
    - Attāluma matricas glabāšana: $O(n^2)$.
- Kvantu meklēšana paātrina uz $O\left(\sqrt{n!}\right) \approx O\left(\left(\sqrt{n}\right)^n\right)$

Bellman-Held-Karp

1962

Dinamiskās programmēšanas algoritms, kas paātrina TSP risināšanu uz $O(n^2 2^n) = O^*(2^n)$.

Quantum Speedups for Exponential-Time Dynamic Programming Algorithms

Andris Ambainis, Kaspars Balodis, Jānis Iraids, Mārtiņš Kokainis, Krišjānis Prūsis, and Jevgēnijs Vihrovs, 2018

- $G = (V, E, w), |V| = n, E \subset V^2$
- $w \to \mathbb{N}$ – šķautņu svari. (Ja $\{u, v\} \notin E$, tad $w(u, v) = \infty$.)
  - Pieņēmums: piekļuve w prasa $\mathrm{poly}(n)$ laiku (**QRAM**).
- $f(S, u, v)$ – īsākais ceļš grafā S, kas sākas u, beidzas v un apmeklē katru S virsotni tieši vienu reizi.
- $N(S, u)$ – virsotnes u kaimiņi grafā S.
- $f(S, u, v) = min_{t \in N(S,u), t \neq v}\{w(u, t) + f(S \setminus \{u\}, t, v)\}$,

  $f(\{v\}, v, v) = 0$
- $f(S, u, v)$ var aprēķināt arī sadalot S divās kopās ($k \in [2, |S| - 1]$):
  - $f(S, u, v) = min_{X \subset S, |X| = k, u \in X, v \notin X}\, min_{t \in X, t \neq v}\{f(X, u, t)$

    $+ f(S \setminus X \cup \{t\}, t, v)\}$

Algoritms

TSP(grafs G, šķautņu svari w):

1. Aprēķina $f(S,u,v)$ visiem $|S| \leq (1-\alpha)n/4$ klasiski, izmantojot dinamisko programmēšanu, saglabā QRAM.
2. Izmanto kvantu minimuma meklēšanu par visiem $S \subset V$, kur $|S| = n/2$, lai atrastu,
   $min_{S\subset V,|S|=n/2} min_{u,v\in S, u\neq v} \{f(S,u,v) + f((V \setminus S) \cup \{u,v\}, v, u)\}$

Klasiskās priekšapstrādes laiks:

$$O^* \left(\binom{n}{\leq (1-\alpha)n/4} \right) = O^* \left(2^{H((1-\alpha)/4)n} \right)$$

Kvantu daļas laiks:

$$O^* \left(\sqrt{\binom{n}{n/2}\binom{n/2}{n/4}\binom{n/4}{\alpha n/4}} \right) = O^* \left(2^{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{H(\alpha)}{4}\right)n} \right)$$

Pie $\alpha \approx 0.055362$, kopējais laiks $O^* \left(2^{0.788595n}\right) = O^* \left(1.727391...^n\right)$

Kvantu algoritms ierobežotam kvantu bitu skaitam

Potenciālie modeļi:

- Kvantu dators ar kļūdu korekciju, bet ierobežotu kvantu bitu skaitu.
- Trokšņains kvantu dators.

Potenciālie risinājumi:

- Precīzs varbūtisks risinājums.
- Aptuvens risinājums.
- Metaheiristikas / AI.

Pirmie izpētes soļi:

- "Computational speedups using small quantum devices".
- Quantum Approximate Optimization Algorithm.